TD 3 : Arithmétique et polynômes

Ce TD étudie les multiples fonctions disponibles dans Maple pour manipuler des polynômes et des fractions rationnelles, ainsi que certaines propriétés de ceux-ci. Néanmoins, comme la manipulation des polynômes est utilisée dans presque tous les exercices des colles précédentes et futures, ce TD ne comporte pas d'exercices spécifiques d'application des commandes de manipulation des polynômes, mais juste un petit résumé des commandes disponibles.
Il serait bon que vous cherchiez les parties théoriques de ce TD avant la colle.

1. Polynômes

Les polynômes et les fractions rationnelles sont les structures favorites de Maple. Pour utiliser la plupart des fonctions de Maple sur les polynômes (regarder l'aide de : `coeff`, `degree`, `lcoeff`, `tcoeff`, et `coeffs`), il est nécessaire de présenter le polynôme à Maple sous une forme ramassée obtenue par `collect`. Les termes obtenus après `collect` ne sont pas ordonnés, mais on peut le faire à l'aide de `sort`. Maple n'effectue pas automatiquement le produit de deux polynômes : il faut lui en donner l'ordre à l'aide de la fonction `expand`. Maple sait effectuer des divisions euclidiennes à l'aide des fonctions `quo` et `rem`, et calculer le pgcd de deux polynômes à l'aide de `gcd` et `gcdex`. Maple sait factoriser dans Q n'importe quel polynôme à coefficients exprimés sous forme d'entiers ou de fractions à l'aide de la fonction `factor` (en fait `factor` est une fonction nettement plus générale, mais cela dépasse le programme de Maths Spé). Pour factoriser un polynôme sur C, on utilise `split` ou `AFactor`. La fonction `convert(.,radical)` permet de mettre les racines du polynôme ainsi factorisé (exprimées par Maple avec `RootOf`) sous la forme de radicaux.

1.1 Une factorisation difficile pour Maple

Factoriser le polynôme $x^{2458}+x^{1229}+1$ dans Q. Remarquer que Maple n'y arrive pas (avec `factor`).
Pour l'aider, remarquer que 1229 est premier (avec `isprime`) et essayer de factoriser quelques polynômes de la forme $x^{2p}+x^{p}+1$ pour *p* premier plus grand que 3.
Comparer les factorisations obtenues avec les valeurs de la fonction `numtheory[cyclotomic](n,x)` de Maple (qui renvoie le n^ième^ polynôme cyclotomique), particulièrement pour `n=3*p`.
Sachant que $x^n-1=\prod_{k|n}\phi_k(x)$ où ϕ_k est le k^ième^ polynôme cyclotomique[1], et que les polynômes cyclotomiques sont irréductibles dans Q, factoriser le polynôme initial.

1.2 Un peu d'arithmétique

Montrer que pour tout *n* entier naturel, $n(n^6-1)$ est divisible par 7.
Pour cela, après avoir vérifié cette propriété pour des petites valeurs de *n*, on factorisera modulo 7 le polynôme $n(n^6-1)$ (voir l'aide de `Factor` (avec un F majuscule)). On pourra aussi essayer d'utiliser `msolve`.

1.3 Racines rationnelles de polynômes à coefficients entiers

Soit $P=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$ un polynôme à coefficients entiers. Soit $x=p/q$, avec *p* et *q* entiers relatifs, et p/q irréductible. Montrer que si *x* est racine de *P*, alors *p* divise a_0 et *q* divise a_n.
En déduire une méthode pour trouver toutes les racines rationnelles d'un polynôme à coefficients entiers.
Créer une fonction Maple qui crée une liste des racines possibles d'un tel polynôme (`numtheory[divisors]`, `seq`, `lcoeff`, `tcoeff`).
Créer une fonction Maple qui attend une liste de racines potentielles et ne renvoie que celles qui sont effectivement des racines. On pourra pour cela utiliser la fonction `estnul` définie par :

```
estnul := (v,x,p) -> subs(x=v,p)=0
```

ainsi que la fonction `select`.

2. Fractions rationnelles

Les fonctions `numer` et `denom` permettent d'extraire le numérateur et le dénominateur d'une fraction rationnelle. La fonction `normal` permet simplifier la fraction en factorisant numérateur et dénominateur (mais le

---

[1] $k|n$ signifie *k* divise *n*.

résultat n'est pas toujours plus simple). Enfin, `convert(f, parfrac, x)` décompose la fraction `f` dont l'indéterminée est `x` en éléments simples sur Q (si les coefficients de la fraction rationnelle sont des entiers ou des fractions). Des options permettent de faire de même sur R, ou C, mais ne jamais oublier que par défaut, Maple travaille sur Q (si les coefficients de la fraction rationnelle sont des entiers ou des fractions (bis)).

2.1 Décomposition en éléments simples

Soit $q = \dfrac{x^3 + x^2 - x + 1}{-3x + 7x^2 - 3x^3 + 7x^4}$.

Décomposer q en éléments simples sur Q avec `convert(.,parfrac,.)`, et C avec `convert(.,fullparfrac,.)`. Utiliser `convert(.,radical)` pour obtenir un résultat lisible.

3. Suites de Sturm d'un polynôme à coefficients réels

Charles Sturm (1803-1855) a résolu en 1829, le problème consistant à déterminer le nombre (sans prendre en compte leur multiplicité) de racines réelles contenues dans un intervalle donné, d'un polynôme à coefficients réels. Le principe est le suivant :

Soit *P* un polynôme à coefficients réels, non constant.

<u>Question 1 :</u> Trouver un moyen simple (c'est à dire sans calculer les racines) de transformer le polynôme *P* en un polynôme ayant les mêmes racines que *P*, mais n'ayant que des racines simples.

On considérera dans la suite que *P* n'a que des racines simples. On défini alors la suite de polynômes (P_k), (c'est une suite de Sturm pour *P*) telle que :

$P_0 = P$, $P_1 = P'$ et $P_k = -(P_{k-2} \bmod P_{k-1})$ pour $k > 1$, jusqu'à ce P_k soit une constante[2].

<u>Question 2 :</u> A un signe près, il s'agit d'un algorithme célèbre, lequel ?

<u>Question 3</u> : Montrer que pour $k > 0$, si $P_k(x) = 0$ alors $P_{k+1}(x) = -P_{k-1}(x)$.

On note alors $\mathrm{Sturm}(P,x)$ le nombre de changements de signes dans les suite $(P_k(x))$ en omettant les zéros.

<u>Question 4 :</u> Utiliser le résultat de la question 3 pour montrer que les seules valeurs de x pour lesquelles $\mathrm{Sturm}(P,x)$ peut changer de valeur sont celles qui annulent *P*.

<u>Question 5 :</u> En déduire que si x et y n'annulent pas *P*, alors $\mathrm{Sturm}(P,x) - \mathrm{Sturm}(P,y)$ est le nombre de racines réelles de *P* sur l'intervalle $[x, y]$.

<u>Application à Maple :</u>

1. Créer une fonction effectuant la transformation demandée à la question 1.
2. Créer une fonction calculant la suite de Sturm d'un polynôme. On pourra s'aider d'une fonction intermédiaire, récursive, qui a pour arguments P_k, P_{k+1} et la variable utilisée pour représenter les polynômes P_k et renvoie la suite de Sturm à partir de P_k.
3. Créer une fonction très similaire qui renvoie le nombre de changements de signes dans la séquence de Sturm d'un polynôme (`signum`).
4. Créer une fonction donnant le nombre de racines réelles d'un polynôme à coefficients réels sur un intervalle donné. L'appliquer à divers polynômes.
5. Vérifier que les fonctions `sturm` et `sturmseq` de Maple (faire `readlib(sturm):`) donnent le même résultat.

Voyez vous un intérêt pratique à un tel résultat ?

[2] A mod B est le reste de la division euclidienne de A par B.