TD 3 : Arithmétique, polynômes

Ex 1 : Calcul de la n-ième décimale de ln(9/10)

Note : comme cet exercice est un peu difficile (pas sur le plan mathématique), nous le ferons tous ensemble.

1. On cherche à calculer les décimales de $1/k$ à partir de la n-ième décimale (non comprise), c'est à dire la partie fractionnaire de $\frac{10^n}{k}$. Que peut-on dire de la partie fractionnaire de $\frac{r}{k}$ où $r \equiv 10^n \bmod k$? Faites quelques essais.
2. Il est relativement aisé de calculer la valeur de r, même pour de très grandes valeurs de n. Pourquoi ? (`?mod`)
3. On cherche à calculer les décimales de $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p(k) \cdot 10^k}$ à partir de la n-ième (non comprise), où p est un polynôme à coefficients entiers. Comment utiliser l'idée décrite plus haut ?
4. Application : calcul de la 100000-ième décimale de ln(9/10).
5. Sachant que $\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k} \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6} \right)$, comment appliquer la méthode précédente au calcul de π ?

Pour plus d'information, se référer à :
D. Bailey, P. Borwein et S. Plouffe, *On the rapid computation of various polylogarithmic constants*.

Ex 2 : Polynômes interpolateurs

On cherche à approcher la fonction $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ sur l'intervalle $[-5 \ldots 5]$ à l'aide de polynômes.

1. Définir et tracer la fonction *f*. Calculer son développement de Taylor au voisinage de x=0 à l'ordre n (pour différentes valeurs de n). Le tracer, et y superposer le tracé de *f*. Que remarque-t-on ?
2. Soit n un entier strictement positif, et $x_i = -5 + 10\frac{i}{n}$. Déterminer un polynôme P_n tel que $\forall i,\ P_n(x_i) = f(x_i)$. On pourra s'aider des polynômes définis par : $L_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$. Reconnaissez-vous ces polynômes ? Tracer simultanément ces polynômes et *f*. Que remarque-t-on ?
3. Mêmes questions, avec $x_i = 5\cos\left(\frac{i + 1/2}{n+1} \pi \right)$. Remarquez-vous un lien avec les polynômes de Tchebycheff (On pourra utiliser le package `orthopoly`) ?
4. Expérimenter les fonctions du package `numapprox`.

Ex 3 : Racines rationnelles de polynômes à coefficients entiers

Soit $P = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ un polynôme à coefficients entiers. Soit $x = p/q$, avec p et q entiers relatifs, et p/q irréductible. Montrer que si x est racine de P, alors p divise a_0 et q divise a_n.

En déduire une méthode pour trouver toutes les racines rationnelles d'un polynôme à coefficients entiers.

Créer une fonction Maple qui crée une liste des racines possibles d'un tel polynôme (`numtheory[divisors]`, `seq`, `lcoeff`, `tcoeff`).

Créer une fonction Maple qui attend une liste de racines potentielles et ne renvoie que celles qui sont effectivement des racines. On pourra pour cela utiliser la fonction `estnul` définie par :

```
estnul := (v,x,p) -> subs(x=v,p)=0
```

ainsi que la fonction `select`.