TD 5 : Séries entières de Fourier et intégration

Ce TD présente les fonctions de Maple relatives à l'étude des développements en série, ainsi que celles relatives à l'intégration. Un exercice traite de séries de Fourier. Aussi, comme c'est le dernier TD, je vous encourage à réfléchir à ce qui vous pose problème dans l'utilisation de Maple et à me soumettre vos questions.

1. Fonctions spécifiques

1.1 Développements limités, séries entières

Maple permet à la fois de manipuler des développements limités et des séries entières.
Les fonctions `taylor` et `series` permettent d'obtenir des développements en série de n'importe quelle fonction usuelle, mais aussi directement de fonctions définies comme racines d'une fonction, solution d'une équation différentielle ou comme primitives d'une autre fonction (même quand Maple n'arrive pas à en calculer une primitive). On peut directement intégrer, dériver, ou inverser des séries.
Attention, Maple n'utilise pas la notation 'petit o' mais la notation 'grand o' :
Il existe M tel que : $|\mathrm{O}(\mathrm{f}(x))| \leq M \cdot |\mathrm{f}(x)|$ au voisinage de $x = 0$.
Le package `powseries` permet de manipuler des séries entières. La fonction `powcreate` permet de définir une série entière par ses coefficients. `tpsform` permet de la représenter jusqu'au rang désiré. Diverses fonctions permettent alors de composer, ajouter, inverser, différentier, intégrer, etc. des séries. La fonction `evalpow` permet directement d'effectuer la plupart des calculs envisageables sur des séries.

1.2 Intégration

La fonction `int` permet de calculer intégrales et primitives. Conseil : vérifiez ses résultats ; l'intégration symbolique est une procédure suffisamment complexe pour qu'on ne lui fasse pas confiance aveuglément. Cette fonction est performante mais malheureusement il faut souvent l'aider. Pensez notamment à préciser, à l'aide de `assume` et `additionally`, les signes des expressions manipulées et les relations d'ordre existantes. La commande `infolevel[int] := 2:` permet de savoir quels sont les problèmes rencontrés par Maple lors de l'intégration, afin de choisir les `assume` nécessaires. Si cela ne suffit pas, le package `student` permet entre autres d'effectuer des changements de variable (`changevar`) et des intégrations par partie (`intparts`).

2. Exercices

Plus il y a de petites étoiles (*) plus l'exercice est difficile.

*2.1 Minimisation d'un intégrale**

Soit N un entier naturel, déterminer le polynôme unitaire P de degré N qui minimise : $\sqrt{\int_0^1 P^2}$.

*2.2 Calcul d'intégrale par intégration par parties et DSE***

Montrer que : $\int_0^1 \frac{\ln(t) \cdot \ln(1-t)}{t} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

- On commencera par vérifier l'existence de l'intégrale.
- On pourra utiliser une intégration par parties (`student[intparts]`) pour déduire :

$$\int_0^1 \frac{\ln(t) \cdot \ln(1-t)}{t} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\ln(t)^2}{1-t} dt$$

- Ensuite on pourra utiliser un développement en série entière pour conclure.

*2.3 DSE utilisant une équation différentielle*****

Développer en série entière : $\mathrm{f}(x) = \left(\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$.

- Pour cela, commencer par utiliser le package `powseries` qui permet de calculer n'importe quel terme du développement. On pourra penser à calculer le DSE de la dérivée d'arcsinus, puis l'intégrer.
- Pour obtenir une forme explicite de celui ci on recherchera une équation différentielle à coefficients polynomiaux vérifiée par `f`. On en déduira une relation de récurrence vérifiée par les coefficients et on résoudra cette relation (`rsolve`).

*2.4 Série de Fourier des polygones****

Soit $\mathrm{f}: \mathrm{R} \to \mathrm{C}$, périodique, affine par morceaux.

- Que représente f ?
- Choisissez une fonction f (`piecewise`).
- Représentez la (`plots[complexplot]`).
- Déterminez le développement en série de Fourier de f, et représentez la somme de la série jusqu'à un certain rang.
- Que peut-on en dire de la convergence ?